

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Случайные графы. Часть 2
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составили:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Курс посвящен современной теории случайных графов. Изучаются вопросы о наличии больших структур в случайном графе (больших путей, паросочетаний и циклов), асимптотическое поведение числа независимости и хроматического числа случайного графа, законы нуля или единицы для случайных графов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение продвинутого курса теории случайных графов.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области случайных графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области случайных графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области случайных графов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Совершенные паросочетания в случайном графе		4		5
2	Гамильтоновы циклы в случайном графе		4		5
3	Число независимости в динамической модели случайного графа		4		5
4	Метод интерполяции, поведение числа независимости в разреженном случайном графе		6		5
5	Метод второго момента в задачах о раскрасках случайного графа		4		5
6	Законы нуля или единицы в случайном разреженном графе, расширения в случайных графах		8		5
Итого часов			30		30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Совершенные паросочетания в случайном графе

Теорема о наличии больших путей в случайном графе

## 2. Гамильтоновы циклы в случайном графе

Неравенства для концентрации вероятностных мер

Независимые множества в случайном графе, поведение числа независимости в плотном случайном графе

## 3. Число независимости в динамической модели случайного графа

Хроматическое число случайного графа

Концентрация значения хроматического числа случайного графа в нескольких значениях

## 4. Метод интерполяции, поведение числа независимости в разреженном случайном графе

Алгоритм Карпа-Сипсера для поиска независимого множества в случайном графе

Хроматическое число разреженного случайного графа

## 5. Метод второго момента в задачах о раскрасках случайного графа

Свойства первого порядка в случайных графах, законы нуля или единицы в плотных случайных графах

## 6. Законы нуля или единицы в случайном разреженном графе, расширения в случайных графах

Теорема Спенсера и Шелаха

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Модели случайных графов [Текст]/А. М. Райгородский, -М., МЦНМО, 2016
2. Случайные процессы : краткий курс [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Розанов .— М. : Наука, 1971 .— 288 с.
3. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные графы. Часть 2» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;  
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач для домашнего задания.

1) Пусть  $np=c>1$ ,  $c$  - фиксировано. С помощью неравенства Янсона докажите, что тогда с вероятностью  $1-o(1/\ln n)$  случайный граф содержит цикл длины  $2\lceil \ln n \rceil + 1$ .

- 2) Докажите, что в графовом случайном процессе с вероятностью, стремящейся к 1, моменты исчезновения последней изолированной вершины и появления совершенного паросочетания совпадают.
- 3) Докажите, что свойство двудольности случайного графа не имеет точной пороговой вероятности.
- 4) Пусть  $y_n = 2np - \ln n - 2 \ln \ln n$ , а  $X_n$  -- число "вишен" в  $G(n, p)$ . Докажите, что

$\begin{itemize}$

- $\item$  если  $y_n \rightarrow -\infty$  и  $n^3 p^2 \rightarrow +\infty$ , то  $X_n$  сходится по вероятности к  $+\infty$ ;
- $\item$  если  $y_n \rightarrow +\infty$ , то  $X_n$  сходится по вероятности к нулю.

$\end{itemize}$

5) Докажите, что если  $p = n^{-\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ ,  $\alpha \in (0, 1/(k-1))$ , то случайный граф  $G(n, p)$  подчиняется  $k$ -закону нуля или единицы (для любого свойства  $L$ , записываемого с помощью свойства первого порядка, кванторная глубина которого не превосходит  $k$ , вероятность того, что случайный граф  $G(n, p)$  обладает этим свойством стремится либо к 0, либо к 1).

6) Пусть  $r \geq 3$  --- фиксированное натуральное число. Докажите, что для любого постоянного  $c > 2r \ln r - \ln r$  случайный граф  $G(n, c/n)$  не является  $r$ -раскрашиваемым с большой вероятностью, т.е. выполнено

$\$$

$$\{\sf P\} \left( \chi(G(n, c/n)) > r \right) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$\$$

Формула оценки

Студент решает задачи из домашнего задания, каждая задача дает 0,5 балла к оценке. Экзамен проходит в форме устного ответа на 2 вопроса их программы обеих частей курса, непосредственно на экзамене можно набрать 4 балла.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень экзаменационных вопросов:

1. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени  $k$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более)  $k$ . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе  $G(n, p)$ .
2. Связность случайного графа  $G(n, p)$ . Теорема о предельной вероятности связности  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln c + o(1))/n$ . Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности  $G(n, p)$ . Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа  $G(n, m)$ .
3. Вершинная и реберная  $k$ -связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в  $G(n, p)$ . Теорема об одновременном наступлении  $k$ -связности и отсутствии вершин степени меньше  $k$  в графовом случайном процессе  $G^\sim$ .
4. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе  $G(n, p)$  совершенного паросочетания.
5. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе  $G(n, p)$ . Понятие случайного двухцветного мультиграфа  $G(n, r, r)$ , алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
6. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша.
7. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$ , где  $\omega(n) \rightarrow +\infty$ .

Примеры билетов:

Билет 1:



1. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$ , где  $\omega(n) \rightarrow +\infty$ .

2. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе  $G(n, p)$ .

Билет 2:

1. Связность случайного графа  $G(n, p)$ . Теорема о предельной вероятности связности  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln n + c + o(1))/n$ .

2. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени  $k$  в случайном графе  $G(n, p)$ .

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.